

УДК 517.53

**СВОЙСТВО КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ A_α^∞ ,
ГДЕ $\alpha > -1$, НА ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ
КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ**

Ермакова Дарья Сергеевна

аспирант

Научный руководитель: **Беднаж Вера Аркадьевна**

к.ф.-м.н., доцент

ФГБОУ ВО "БГУ им. И.Г. Петровского"

Аннотация: В работе доказано, что нули аналитической функции $F \in A_\alpha^\infty(G)$, $\alpha > -1$, можно выделить, не выходя из пространства $A_\alpha^\infty(G)$, где G – односвязная область на комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки.

Ключевые слова: единичный круг, аналитическая функция, нули аналитической функции, комплексная плоскость, бесконечное произведение.

**PROPERTIES OF ROOT SETS OF CLASS FUNCTIONS A_α^∞ , $\alpha > -1$, ON
THE SIMPLY CONNECTED DOMAIN OF THE COMPLEX PLANE**

Ermakova Darya Sergeevna

Scientific adviser: **Bednazh Vera Arkadievna**

Abstract: It is proved that the zeros of an analytic function $F \in A_\alpha^\infty(G)$, $\alpha > -1$, can be distinguished without leaving the space $A_\alpha^\infty(G)$, where G is a simply connected domain on the complex plane whose boundary contains more than one point.

Key words: unit disk, analytic function, zeros of an analytic function, complex plane, infinite product.

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ – множество всех аналитических в D функций. В 1914 году Харди рассмотрел класс H^p , $p > 0$, аналитических функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty.$$

На сегодняшний день хорошо изучены корневые множества функций класса H^p . Известно, что если функция $f \in H^p(D)$, $0 < p < +\infty$, то нули $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ функции подчиняются известному условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty.$$

Введем в рассмотрение класс функций

$$A_{\alpha}^{\infty}(D) = \left\{ f \in H(D) : |f(z)| \leq \frac{c_f}{(1 - |z|)^{\alpha}} \right\},$$

где c_f – положительная постоянная, зависящая только от f , $\alpha > -1$.

В работе Ф. А. Шамояна [1] установлено, что нули аналитической функции можно выделить, не выходя из пространства $A_{\alpha}^{\infty}(D)$.

Обобщим этот результат на случай произвольной односвязной области комплексной плоскости.

Обозначим

$$A_{\alpha}^{\infty}(G) = \left\{ f \in H(G) : |F(w)| \leq \frac{c_F}{(\text{dist}(w, \partial G))^{\alpha}} \right\},$$

где $\text{dist}(w, \partial G)$ – расстояние от точки w до границы области ∂G ,

c_F – положительная постоянная, зависящая только от F , $\alpha > -1$.

Теорема 1

Если функция $f \in A_{\alpha}^{\infty}(D)$, $\alpha > -1$, и $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $z_k \in D$,

тогда функция $\frac{f}{\tilde{B}} \in A_{\alpha}^{\infty}(D)$, где $\tilde{B}(z, z_k)$ – бесконечное произведение вида

$$\tilde{B}(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(z, z_k)) \cdot b_k(z, z_k), \quad z, z_k \in D.$$

Теорема 2

Пусть G – односвязная область на комплексной плоскости, граница которой содержит более одной точки. Если функция $F \in A_{\alpha}^{\infty}(G)$, $\alpha > -1$, и

$F(w_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $w_k \in G$, тогда функция $\frac{F}{\tilde{B}} \in A_{\alpha}^{\infty}(G)$,

где $\tilde{B}(w, w_k)$ – бесконечное произведение вида

$$\tilde{B}(w, w_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(\psi(w), \psi(w_k))) \cdot b_k(\psi(w), \psi(w_k)), w, w_k \in G,$$

$\psi(w)$ – функция, конформно отображающая область G на единичный круг D .

Доказательство.

Так как $F \in A_\alpha^\infty(G)$, то

$$|F(w)| \leq \frac{c_F}{(\text{dist}(w, \partial G))^\alpha}.$$

Конформно отобразим единичный круг D на область с помощью функции $w = \varphi(z)$ [2, с. 113]:

$$|F(\varphi(z))| \leq \frac{c_F}{(\text{dist}(\varphi(z), \partial G))^\alpha}.$$

Функция $F(\varphi(z)) \in H(D)$. Обозначим $h(z) = F(\varphi(z))$, $z \in D$, тогда

$$|h(z)| \leq \frac{c_F}{(\text{dist}(\varphi(z), \partial G))^\alpha}.$$

Используя двойное неравенство, которое выводится из теоремы Кебе [3, с. 51]:

$$\frac{1}{4} \frac{\text{dist}(\varphi(z), \partial G)}{1 - |z|} \leq |\varphi'(z)| \leq 4 \frac{\text{dist}(\varphi(z), \partial G)}{1 - |z|}, \quad (1)$$

получим:

$$|h(z)| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F}{(1 - |z|)^\alpha \cdot |\varphi'(z)|^\alpha}.$$

Функция $\varphi'(z)$ не обращается в нуль внутри единичного круга [2].

Рассмотрим функцию

$$f(z) = h(z) \cdot (\varphi'(z))^\alpha, \quad (2)$$

аналитическую в единичном круге и отличную от тождественного нуля.

Тогда последнее неравенство будет эквивалентно следующему:

$$\left| \frac{f(z)}{(\varphi'(z))^\alpha} \right| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F}{(1 - |z|)^\alpha \cdot |\varphi'(z)|^\alpha}$$

или

$$|f(z)| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F}{(1-|z|)^\alpha},$$

то есть $f \in A_\alpha^\infty(D)$.

Имеем, $F(w_k) = 0$ и $w_k = \varphi(z_k)$, $k=1,2,\dots$, то $F(\varphi(z_k)) = 0$, то есть $h(z_k) = 0$, $z_k = \psi(w_k)$, $k=1,2,\dots$. Так как нули функции $h(z)$ совпадают с нулями функции $f(z) = h(z) \cdot (\varphi'(z))^\alpha$, то $f(z_k) = 0$, $k=1,2,\dots$.

Итак, нами построена функция $\frac{f}{\tilde{B}} \in A_\alpha^\infty(D)$, не имеющая нулей в $A_\alpha^\infty(D)$.

Отобразим конформно область G на единичный круг с помощью функции $z = \psi(w)$, получим:

$$\left| \frac{f(\psi(w))}{\tilde{B}(\psi(w), \psi(w_k))} \right| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F}{(1-|\psi(w)|)^\alpha}.$$

Используя оценки (1), замечаем, что указанное неравенство эквивалентно следующему:

$$\left| \frac{f(\psi(w))}{\tilde{B}(\psi(w), \psi(w_k))} \right| \leq \frac{4^\alpha \cdot c_F \cdot |\varphi'(\psi(w))|^\alpha \cdot 4^\alpha}{(\text{dist}(w, \partial G))^\alpha}$$

или

$$\left| \frac{f(\psi(w))}{\tilde{B}(\psi(w), \psi(w_k))} \right| \leq \frac{c_{F,\alpha} \cdot |\varphi'(\psi(w))|^\alpha}{(\text{dist}(w, \partial G))^\alpha}.$$

Функция $f(\psi(w)) \in H(G)$, $w \in G$. Учитывая (2), получим

$$\left| \frac{F(w)}{\tilde{B}(\psi(w), \psi(w_k))} \right| \leq \frac{c_{F,\alpha}}{(\text{dist}(w, \partial G))^\alpha},$$

то есть функция $\frac{F}{\tilde{B}} \in A_\alpha^\infty(G)$, где

$$\tilde{B}(w, w_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(\psi(w), \psi(w_k))) \cdot b_k(\psi(w), \psi(w_k)), w, w_k \in G.$$

Далее, так как $\tilde{B}(z, z_k) \neq 0$, $z_k = \psi(w_k)$, $k=1,2,\dots$, то есть

$\prod_{k=1}^{+\infty} (2 - b_k(z, z_k)) \cdot b_k(z, z_k) \neq 0$. А это справедливо тогда и только тогда, когда

$b_k(z, z_k) \neq 0$, то есть $\frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \cdot \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k \cdot z_k} \neq 0$, $k=1, 2, \dots$. Следовательно, $z \neq z_k$,

$z_k = \psi(w_k)$, $k=1, 2, \dots$. Отсюда заключаем, что $\tilde{B}(w, w_k) \neq 0$.

Таким образом, мы выделили нули аналитической функции, не выходя из пространства $A_\alpha^\infty(G)$.

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Djrbashian A.E. and Shamoyan F.A. Topics in the theory of A_α^p spaces. Leipzig: BSB Teubner, 1988.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1958. – 736 с.
3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 630 с.